

8. Conclusions

As an application of the low-temperature approximation, we were able to find the dispersion relations for linear waves in multicomponent beam-plasma systems, in the case of wave propagation and beam direction parallel to the external magnetic induction.

These formulas have a very wide range of applications, as they are not subject, to begin with, to the CHEW-GOLDBERGER-LOW hypothesis of strong external magnetic inductions. Amongst others, their

applications include the now conventional multi-component plasmas, charged particle beams and every physical situation between the two extremes cited. Some notable cold beams and plasmas results are included as special cases, but are by no means intended to be the only applications possible. The applications discussed in the last sections are meant as an illustration of the general treatment but not as an exhaustive procedure.

We wish to thank Professor dr. R. MERTENS for his stimulating interest in our work.

Über das unterschiedliche Ionisationsgleichgewicht wasserstoff- und alkali-ähnlicher Ionen in optisch dünnen Plasmen *

C. MAHN

Institut für Plasmaphysik, Garching bei München **

(Z. Naturforschg. 22 a, 1939—1952 [1967]; eingegangen am 14. Juli 1967)

There are many plasmas in which the populations of the various energy states of ions and electrons assume a steady state, but complete local thermal equilibrium is prevented because, on the one hand, radiation absorption is absent and, on the other, the electron density is too low.

Calculations for a plasma without radiation absorption show that: Where hydrogen-like ions are involved it is nearly in order to dispense with detailed calculations and described the ionization equilibrium with the assumption that the collisional ionization processes from the ground state can be equated with the radiative recombination processes to the ground state. For sufficiently low electron densities this leads to the Corona formula.

In the case of other ions, however, neglecting the excited states may result in serious errors. This is because these energy states — unlike those for hydrogen-like ions, which are relatively near the ionization limit — are distributed much more uniformly between the ground state and ionization limit. The implications of this behaviour are discussed with reference to alkali-like ions. A model for the term systems and the collision and radiation coefficients is used to derive the population densities and approximative ionization formulae. According to these the ratio of the densities of the lithium-like O VI ions and the next higher level of ions (O VII), for instance, may differ (for electron densities $n_e = 5 \times 10^{17} \text{ cm}^{-3}$) from the result of the Corona formula by a factor of 20.

Bei der spektroskopischen Plasmadiagnostik hat man es häufig mit Plasmen zu tun, deren Elektronendichten zu gering sind, um noch Anregungs- und Ionisationsverhältnisse zu gewährleisten, wie sie die Formeln des vollständigen thermischen Gleichgewichts (LTE) beschreiben. Dabei können aber ihrerseits die Partialdichten der beobachteten Ionenart so klein sein, daß man von jeder Art von Photoabsorptionsprozessen absehen kann. Das beides trifft häufig auf sogenannte Verunreinigungs-Ionen zu, die den Hochtemperaturplasmen, beabsichtigt

oder nicht, zugefügt sind. In diesem Zusammenhang wird ein derartiges Plasma gewöhnlich als optisch dünn bezüglich dieser Ionen bezeichnet.

Die vorliegenden Rechnungen befassen sich besonders mit dem Fall, daß die Ionen, für die das Plasma als optisch dünn zu betrachten ist, der isoelektronischen Sequenz des Lithiums angehören. Dazu zählen u.a. C IV, N V und O VI, das sind Ionen, die in vielen Plasmen gegenwärtig sind und auch oft zu spektroskopischen Messungen herangezogen werden. Zwar umschließt das hier vorgeschlagene Modell alle alkaliähnlichen sowie auch die wasserstoffähnlichen Ionen, doch wird insbesondere das Ergebnis für lithiumähnliche Ionen benützt, um auf einen entscheidenden Unterschied gegenüber den wasserstoffähnlichen hinzuweisen.

* Auszug aus der von der Fakultät für Maschinenwesen und Elektrotechnik der Technischen Hochschule München genehmigten Dissertation über „Das unterschiedliche Ionisationsgleichgewicht wasserstoff- und alkali-ähnlicher Ionen in optisch dünnen Plasmen“ des Dipl.-Phys. CARSTEN MAHN.

** 8046 Garching bei München



Im vollständigen thermischen Gleichgewicht herrscht „detailliertes Gleichgewicht“, d.h. jeder Elementarprozeß ereignet sich im Mittel ebenso oft in der einen wie sein Umkehrprozeß in der anderen Richtung.

An Elementarprozessen gibt es einerseits die Strahlungsprozesse, von denen hier nur die Spontanemissionen betrachtet werden sollen.

Die mit den Strahlungsprozessen konkurrierenden Prozesse sind andererseits die inelastischen Stöße der Elektronen. Nur bei sehr kleinen Ionisationsgraden, oder wenn die Iontemperatur sehr viel größer ist als die Elektronentemperatur, können auch durch Ionen Anregungen zwischen eng benachbarten Niveaus hervorgerufen werden. Im allgemeinen dürfen aber Stöße durch schwere Teilchen unberücksichtigt bleiben, weil letztere höchstens etwa die Hälfte ihrer kinetischen Energie im inelastischen Stoß abgeben können, die Elektronen dagegen praktisch die gesamte. Es genügt also, eine MAXWELL-Verteilung der Elektronen zu fordern.

Während die Stoßprozesse zwischen den Niveaus um so wahrscheinlicher werden, je höher und enger benachbart im Termsystem diese Niveaus liegen, ist es mit den Strahlungsprozessen gerade umgekehrt. So kann sich also für tiefliegende Niveaus, speziell für den Grundzustand, das Fehlen von Strahlungsabsorptionen sehr wohl in einer Abweichung von der LTE-Besetzung bemerkbar machen, während hochliegende Niveaus so stark „stoßbestimmt“ sind, daß noch keine Abweichung eintritt. Es ist also zweckmäßig, bei gegebener Temperatur und Elektronendichte die Besetzung eines angeregten Niveaus mit derjenigen der nächsthöheren Ionenart im Grundzustand zu verknüpfen. Das geschieht durch Kombination der BOLTZMANN- und SAHA-Verteilung (Formel (36)). Man kann dann sagen: Alle Niveaus oberhalb eines Grenzniveaus („collision limit“) sind „stoßbestimmt“ und gehorchen also der „SAHA-BOLTZMANN-Verteilung“.

Eine übliche spektroskopische Methode, Elektronentemperaturen zu bestimmen, ist die, die Intensitäten der Spektrallinien zweier benachbarter Ionisierungsstufen eines Elements miteinander zu vergleichen. Wenn die oberen Niveaus beider Linien

„thermisch besetzt“ sind, also über die „SAHA-BOLTZMANN-Formel“ mit der Dichte der nächsthöheren Ionisierungsstufe verbunden sind, so spiegelt das Linienintensitätsverhältnis das Dichteverhältnis dieser beiden nächsthöheren Ionisierungsstufen wider. Mißt man z.B. die Intensitäten einer C III- und einer C IV-Linie — mit „thermisch besetzten“ oberen Niveaus — so liefert ihr Verhältnis nur dann eine Aussage über die Temperatur, wenn die Art des Ionisationsgleichgewichts $C\text{ IV} \leftrightarrow C\text{ V}$ bekannt ist. Nun sind zwar in einem optisch dünnen Plasma sämtliche Gleichgewichtsbesetzungen durch Angabe der Temperatur T , der Elektronendichte n_e sowie gegebenenfalls des Mischungsverhältnisses prinzipiell bestimmt, doch erfordert es im Gegensatz zum LTE-Plasma, bei dem T und n_e nur noch in die SAHA-BOLTZMANN-Formel einzusetzen sind, die Lösung eines Systems von mindestens so vielen linearen Gleichungen, wie es „nicht-thermisch besetzte“ Niveaus gibt.

Die Schwierigkeit liegt dabei in der geringen Kenntnis der Koeffizienten dieser Gleichungen, vor allem der Wirkungsquerschnitte für unelastische Stöße. Darum pflegt man gerne dieses Problem zu umgehen, indem man annimmt: Das Ionisationsgleichgewicht sei gegeben durch die Gleichheit von Stoßionisations- und Strahlungsrekombinationsprozessen, bezogen auf den Grundzustand, wobei man gegebenenfalls noch Dreierstoßrekombinationen in den Grundzustand berücksichtigt, um für große Elektronendichten einen kontinuierlichen Übergang zur SAHA-Formel zu erhalten, z. B.¹

Häufig benützt man auch die von ELWERT² angegebene Form der sogenannten Korona-Formel, die zwar Strahlungsrekombinationen auch auf angeregte Niveaus berücksichtigt (das ergibt nur einen Korrekturfaktor der Größenordnung 2), die aber Stoßionisationen nur vom Grundzustand enthält, unter dem Hinweis, daß bei demjenigen Plasma, für das diese Formel entwickelt wurde, nämlich dem der Sonnen-Korona, die angeregten Niveaus — infolge der sehr starken Abweichung vom LTE — relativ zum Grundzustand so schwach besetzt sind, daß sie zur Gesamtbilanz keinen wesentlichen Beitrag liefern³. Diese in der Sonnen-Korona gültigen Annah-

¹ W. L. BOHN, Z. Naturforschg. **21a**, 377 [1966].

² G. ELWERT, Z. Naturforschg. **7a**, 432 [1952].

³ Das Vernachlässigen der angeregten Niveaus bei den Stoßionisations- und Rekombinationsprozessen bedeutet übrigens nicht, daß man annimmt, es gäbe keine Stoßionisationen von diesen Niveaus aus, sondern vielmehr, daß sie durch Rekombinationen exakt kompensiert werden.

men sind für viele Labor-Plasmen jedoch nicht erfüllt. Tatsächlich werden die Rechnungen zeigen, daß in gewissen Elektronendichtebereichen bereits bei lithiumähnlichen Ionen die Berücksichtigung angeregter Niveaus Unterschiede von mehr als einem Faktor 20 gegenüber der oben beschriebenen Korona-Formel mit sich bringt. Für wasserstoffähnliche Ionen dagegen ist die ELWERTSche Formel recht gut anwendbar. Während nämlich im Termschema der Wasserstoffähnlichen der Energieabstand des Grundniveaus vom ersten angeregten weitaus größer als alle anderen ist (nämlich bereits $3/4$ der gesamten Ionisierungsenergie), liegen im Vergleich dazu im Termschema der Lithiumähnlichen die Niveaus viel gleichmäßiger verteilt; vor allem ist hier der Energieabstand zwischen dem Grundzustand und dem ersten angeregten schon viel eher vergleichbar mit allen andern. Wenn es daher bei Wasserstoffähnlichen gerechtfertigt sein mag, alle angeregten Niveaus samt der Ionisierungsgrenze zu einem fiktiven Niveau zusammenzufassen (dieses ist das der Korona-Verteilung adäquate Modell), so kann das jedoch im Falle der Lithiumähnlichen keine gute Näherung mehr sein.

Zusammenfassend sei gesagt: Infolge der wesentlich verschiedenen Termstrukturen muß man bei alkaliähnlichen Ionen einen viel größeren Einfluß der angeregten Niveaus auf das Ionisationsgleichgewicht eines optisch dünnen Plasmas erwarten als bei wasserstoffähnlichen Ionen. Oder in anderer Formulierung: Bei anderen als wasserstoffähnlichen Ionen wird der Beitrag der stufenweisen Ionisation über angeregte Niveaus zum Ionisationsgleichgewicht größer sein als bei wasserstoffähnlichen. Es soll daher im folgenden das vollständige Gleichungssystem, das die Gleichgewichtsbesetzungen enthält, wenigstens für ein Modell-Ion gelöst und aus den Ergebnissen eine empirische Näherungsformel für das Ionisationsgleichgewicht gewonnen werden. Für wasserstoffähnliche Ionen sind derartige Rechnungen bereits z.B. von BATES, KINGSTON und McWHIRTER⁴ durchgeführt worden.

1. Das Modell

1.1. Gegeben sei ein Plasma der Elektronendichte $n_e \text{ cm}^{-3}$.

1.2. Die Elektronengeschwindigkeiten sollen einer MAXWELL-Verteilung mit der Temperatur $T^\circ\text{K}$ gehorchen.

1.3. Zeitliche Änderungen von Elektronendichte und -temperatur sollen so langsam verlaufen, daß sämtliche Besetzungen der Ionen zu jeder Zeit dem Gleichgewichtszustand entsprechen.

1.4. Räumliche Inhomogenitäten von Elektronendichte und -temperatur sowie Strömungen im Plasma sollen nur soweit zugelassen werden, als sie noch nicht zu einer Störung der stationären Besetzungen beitragen (Relaxationseffekte).

1.5. In dem Plasma sollen (z) -fach geladene Ionen der Dichte n_z und $(z-1)$ -fach geladene Ionen der Dichte n_{z-1} desselben Elements sein. Die Ionen der Sorte $(z-1)$ sollen der isoelektronischen Sequenz des Wasserstoffs oder der Alkalimetalle angehören (d.h. das Leuchtelektron soll ein s-Elektron sein und die Ionen der Sorte (z) demnach entweder bloße Kerne oder Ionen mit Edelgasstruktur).

1.6. Bei beiden Ionensorten sollen sich praktisch alle im Grundzustand befinden. (Das ist dann der Fall, wenn die thermische Energie kT klein ist gegen die Anregungsenergien. Dieses ist aber auch gerade die Voraussetzung dafür, daß die Temperaturbestimmung aus Linienintensitäten eine empfindliche Methode ist. Man wird daher im allgemeinen auch nur an derartigen Verhältnissen interessiert sein.)

1.7. Gesucht wird das Ionisationsgleichgewicht n_z/n_{z-1} . Dieses Verhältnis wird um einen Faktor $1/\varrho$ (≤ 1) von demjenigen bei LTE-Verhältnissen abweichen. Wenn man letzteres mit $(n_z/n_{z-1})^{(E)}$ bezeichnet, so ist der wirkliche Wert

$$n_z/n_{z-1} = (1/\varrho) (n_z/n_{z-1})^{(E)}. \quad (1)$$

1.8. Das Termschema des $(z-1)$ -Ions soll — soweit es sich um ein alkaliähnliches handelt — wie dasjenige des entsprechenden wasserstoffähnlichen derselben Ionisationsstufe beschaffen sein, nur mit dem Unterschied, daß der Grundzustand nicht das Niveau⁵ mit der Hauptquantenzahl 1, sondern dasjenige mit der Hauptquantenzahl p_0 ist (z.B. $p_0 = 2$ bei Lithiumähnlichen, $p_0 = 3$ bei Natriumähnlichen). Dieses Modell wurde von BATES et al.⁴ bereits auf Alkali-Atome angewandt. Dabei ignoriert man also die Niveau-Aufspaltung infolge verschiedener Bahndrehimpulse der Elektronen. Diese Näherung ist um

⁴ D. R. BATES, A. E. KINGSTON u. R. W. P. McWHIRTER, Proc. Roy. Soc. London A **267**, 297 [1962].

⁵ Unter „Niveau“ soll hier immer die Gesamtheit der durch die Hauptquantenzahl p gekennzeichneten Eigenwerte verstanden werden.

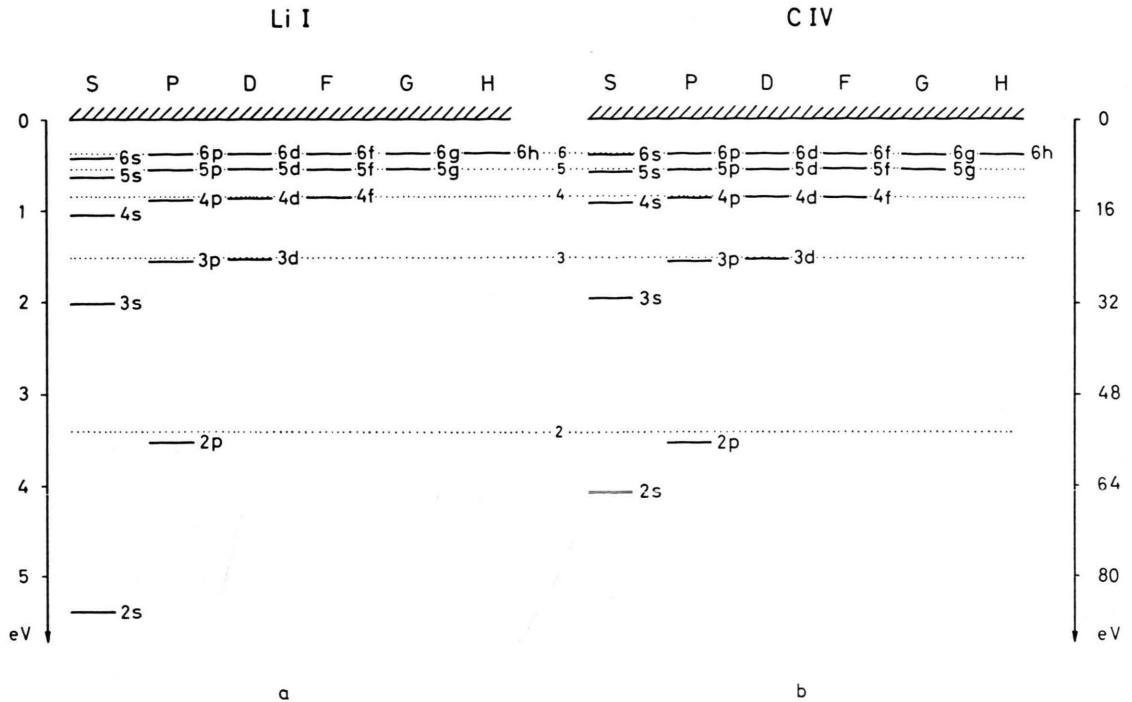


Abb. 1. Termschema von Li I (a) und Termschema von C IV (b).

so besser gerechtfertigt, je höher die Ionisationsstufe des $(z-1)$ -Ions ist, denn der Quantendefekt nimmt mit zunehmender Ionisationsstufe ab. (Ionen mit $p_0 = 1$ werden wir als Wasserstoffähnliche, solche mit $p_0 > 1$ als Alkaliähnliche bezeichnen.) Diese Tatsache wird in Abb. 1 veranschaulicht.

1.9. Die Unterniveaus (verschiedener Nebenquantenzahl) jeder Hauptquantenzahl p seien entsprechend ihrem statistischen Gewicht $2 \cdot p^2$ besetzt.

1.10. Das Plasma sei optisch dünn in dem Sinne, daß Photoabsorptionsprozesse zu den Niveau-Besetzungen nichts beitragen.

1.11. Das Vorhandensein anderer Ionisationsstufen des betrachteten Elements soll keinen Einfluß auf das Ionisationsgleichgewicht n_z/n_{z-1} haben. (Es kann gezeigt werden, daß diese Bedingung dann erfüllt ist, wenn Prozesse zwischen dem $(z-1)$ - und dem $(z-2)$ -Ion nur vom Grundzustand p_0 des $(z-1)$ -Ions ausgehen.)

1.12. Unelastische Stöße sollen die Ionen nur mit den Elektronen erfahren.

Eine weitere modellmäßige Näherung, die die Struktur der Wirkungsquerschnitte für unelastische Stöße betrifft, wird im folgenden Abschnitt besprochen.

2. Die Koeffizienten für die Elementarprozesse

Zunächst einmal muß dem Abschnitt 3 vorgegriffen werden: Eigentlich müßte ein System von unendlich vielen linearen Gleichungen gelöst werden. In Wirklichkeit aber sind nur endlich viele Niveaus des $(z-1)$ -Ions als gebunden anzusehen; oberhalb einer gewissen Hauptquantenzahl sind die Niveaus von „freien“ Zuständen des „Elektronenkontinuums“ nicht mehr zu unterscheiden. Das geschieht durch Erniedrigung der Ionisierungsenergie wegen der elektrischen Mikrofeldstärke der Ladungsträger im Plasma. Im allgemeinen genügen noch weniger Gleichungen als es dieser durch die Mikrofeldstärke bestimmten Hauptquantenzahl entspricht, weil eine ganze Gruppe von Niveaus darunter noch „thermisch besetzt“ ist. Damit die Lösung des Gleichungssystems unabhängig von der willkürlichen Wahl der Zahl der Gleichungen wird — es müssen nur mindestens so viele sein wie es „nichtthermisch besetzte“ Niveaus gibt —, müssen die Koeffizienten folgende Bedingung erfüllen: Wenn man statt unendlich vieler Niveaus nur p^* berücksichtigt, so muß die dadurch fehlende Zahl von „gebunden-gebunden“-Prozessen durch eine zusätzliche Zahl von „frei-gebunden“-Prozessen gerade ausgeglichen

werden. Allerdings müssen, damit die Kompensation vollständig ist, die Koeffizienten für „gebunden-gebunden“- und für „frei-gebunden“-Prozesse in einer bestimmten Weise miteinander verknüpft sein. Und zwar ist diese „Konsistenz-Forderung“ dann erfüllt, wenn die Koeffizienten für Prozesse zwischen tiefliegenden Niveaus und solchen nahe der Ionisierungsgrenze „korrespondenzmäßig“ in diejenigen zwischen tiefliegenden Niveaus und dem Kontinuum übergehen. Das bedeutet z. B., daß die fehlende Rate von Stößen 2. Art, die entsteht, wenn dem Ion statt unendlich vieler diskreter Niveaus nur p^* zugeordnet werden, kompensiert wird durch eine zusätzliche Dreierstoßrekombinationsrate aus dem Energieintervall zwischen $p = p^*$ und $p = \infty$ (s. Abb. 2).

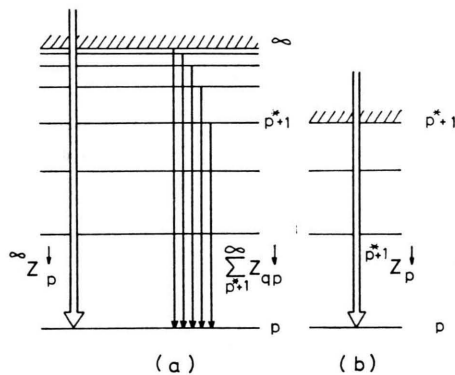


Abb. 2. „Konsistenz-Forderung“. Die Skizze gilt gleichermaßen für Stoß- und Strahlungsprozesse. Ganz analog würde sie für „Aufwärts-Prozesse“ aussehen. Wenn man einem Ion statt unendlich vieler Niveaus (a) nur p^* zuordnet (b), so muß das Fehlen der diskret-diskret-Prozesse durch eine Zunahme der kontinuierlich-diskret-Prozesse kompensiert werden, wenn die Besetzungsdichte von p unabhängig von p^* sein soll.

Z_{qp}^{\downarrow} bedeutet die Zahl der gg-Prozesse einer bestimmten Art (entweder nur Strahlungen oder nur Stöße) pro Zeit- und Volumeneinheit von q nach p (q, p),

$p^{*+1}Z_p^{\downarrow}$ bzw. ∞Z_p^{\downarrow} die entsprechende Zahl aller fg-Prozesse auf p , wobei das entstehende Ion p^* bzw. ∞ gebundene Niveaus hat. Die Niveaus oberhalb p^* seien „thermisch besetzt“.

Für nicht zu kleine p^* und $p \ll p^*$ ist dann die Bedingung zu erfüllen:

$$\sum_{q=p^{*+1}}^{\infty} Z_{qp}^{\downarrow} = p^{*+1}Z_p^{\downarrow} - \infty Z_p^{\downarrow}.$$

2.1. Strahlungsprozesse

Für die Absorptionsoszillatorenstärke wasserstoff-ähnlicher Ionen gibt es eine asymptotische Nähe-

rungsformel für hohe Hauptquantenzahlen⁶:

$$f_{pq} = \frac{2^4}{3^{3/2}\pi} \cdot \frac{1}{p^5} \cdot \left(\frac{z^2 \chi_H}{h\nu_{pq}} \right)^3 \cdot \frac{2}{q^3}, \quad (\text{s. Anm. 7}). \quad (2)$$

Wenn man einen Fehler bis zu ungünstigstenfalls 250% in Kauf nimmt, kann man diese Formel auf alle Übergänge anwenden.

p und q : Hauptquantenzahl des unteren und oberen Niveaus,

χ_H : Ionisierungsenergie von Wasserstoff (des ungestörten Atoms),

$h\nu_{pq}$: Energieabstand zwischen beiden Niveaus,

h : PLANCKSches Wirkungsquantum,

z : Ionisationsstufe des $(z-1)$ -Ions (es ist also z. B. $z=1$ für $H^0 \equiv HI$, $z=2$ für $He^+ \equiv He II$, etc.),

$$h\nu_{pq} = z^2 \chi_H (1/p^2 - 1/q^2). \quad (3)$$

Wegen der bequemen Handhabung wird daher der Ausdruck (2) für alle Übergänge benutzt, auch im Hinblick darauf, daß die Unsicherheit in den Stoßkoeffizienten wegen der nur mäßig bekannten Querschnitte wahrscheinlich sowieso mindestens ebenso groß ist.

Aus (2) läßt sich eine Absorptionsoszillatorenstärke für den Übergang vom Niveau p ins Kontinuum ableiten: Man stelle sich Übergänge in Niveaus q , oberhalb eines Niveaus p^* , vor, die so dicht liegen, daß es gerechtfertigt ist, q sich kontinuierlich ändern zu lassen.

Aus dem Grenzübergang von gebundenen Niveaus q zu einem Energiekontinuum, entsprechend dem Korrespondenzprinzip, folgt aus (2):

$$\frac{df_p}{d(h\nu)} = \frac{2^4}{3^{3/2}\pi} \cdot \frac{z^4}{p^5} \cdot \frac{\chi_H^2}{(h\nu)^3} \quad \text{für } h\nu \geq h\nu_{p,p^{*+1}} \quad (4)$$

als die differentielle Oszillatorenstärke für Absorption eines Quants mit der Energie zwischen $h\nu$ und $h\nu + d(h\nu)$ durch ein Ion im Zustand p .

Durch Integration über den gesamten Frequenzbereich erhält man daraus:

$$p^{*+1}f_p = \frac{2^3}{3^{3/2}\pi} \cdot \frac{1}{p} \cdot \left[1 - \frac{p^2}{(p^{*+1})^2} \right]^{-2}; \quad (5)$$

das ist die Absorptions-Oszillatorenstärke für das Rekombinationskontinuum vom Niveau p . (Der Index „ p^{*+1} “ soll anzeigen, daß es sich um ein Ion mit p^* diskreten Niveaus handelt.)

⁶ H. A. BETHE u. E. E. SALPETER, Handbuch der Physik, Bd. XXXV, Verlag Springer, Berlin 1957.

⁷ In ⁶ fehlt bei der Formel (63.11) auf der rechten Seite der Faktor $1/2n^2$.

Aus dem bekannten Ausdruck für die Gesamtabsorption in einer Spektrallinie:⁸

$$\int_{\text{Linie}} k_{pq}(\nu) d\nu = \frac{\pi e^2}{mc} \cdot f_{pq} [\text{cm}^2 \text{sec}^{-1}] \quad (6)$$

(m : Elektronenmasse; c : Lichtgeschwindigkeit; e : Elementarladung)
folgt für den frei-gebunden-Absorptionsquerschnitt:

$$k_p(\nu) = \frac{2^6 \alpha}{3^{3/2}} \cdot \pi a_0^2 \cdot \frac{z^4}{p^5} \cdot \left(\frac{\chi_H}{h\nu} \right)^3 [\text{cm}^2] \quad (7)$$

($a_0 = h^2/(4\pi^2 m e^2)$ BOHRscher Radius;
 α : SOMMERFELDSche Feinstruktur-Konstante.)

Das ist die bekannte Form des Absorptionsquerschnitts für Rekombinationskontinua wasserstoffähnlicher Ionen, wenn man den quantenmechanischen Korrektur-(Gaunt)-Faktor gleich Eins setzt (siehe z. B. UNSÖLD⁹).

Aus den Absorptionsquerschnitten ergeben sich durch Faltung mit der PLANCKschen Strahlungsverteilung die Absorptionskoeffizienten. Die Strahlungsverteilung in der WIENSchen Näherung — d. h. ohne Berücksichtigung der induzierten Emission — lautet:

$$B(h\nu) = \frac{2(h\nu)^3}{h^2 c^2} \cdot \exp\left(-\frac{h\nu}{kT}\right) [\text{erg cm}^{-2}] \quad (8)$$

Der Photoabsorptionskoeffizient für den Übergang $p \rightarrow q$ ist dann bei isotroper Strahlung und wenn $B(h\nu)$ im Linienbereich konstant ist:

$$\bar{R}_{pq}^\dagger = z^4 R_{gg} \cdot \frac{1}{p^3} \cdot \frac{2}{q^3} \cdot \frac{\exp(-s_{pq})}{(1 - p^2/q^2)} [\text{sec}^{-1}], \quad (9)$$

mit den Abkürzungen:

$$R_{gg} = (2^3 \alpha^4 / \pi 3^{3/2}) (c/a_0) [\text{sec}^{-1}] \quad (10)$$

$$\text{und} \quad s_{pq} = s(p_0^2/p^2) [1 - p^2/q^2], \quad (11)$$

wobei s das Reziproke der reduzierten Temperatur ist:

$$s = z^2 \chi_H / p_0^2 \cdot kT, \quad (12)$$

$z^2 \chi_H / p_0^2$ ist die Ionisierungsenergie vom Grundzustand des $(z-1)$ -Ions aus, wenn es unendlich viele diskrete Niveaus hat.

Der Absorptionskoeffizient des p -Rekombinationskontinuums ergibt sich aus (7) und (8) nach Integration über die Frequenz zu:

$$p^{*+1} \bar{R}_p^\dagger = \frac{z^4}{p_0} \cdot \frac{1}{2} \cdot R_{gg} \cdot \frac{1}{s^{1/2}} \cdot \frac{1}{p^4} \cdot \frac{\exp(-s_{p,p^{*+1}})}{[1 - p^2/(p^{*+1})^2]^{1/2}} \cdot G(s_{p,p^{*+1}}) [\text{sec}^{-1}], \quad (13)$$

wobei aus Zweckmäßigkeit die Funktion

$$G(x) = 2x^{1/2} \cdot \exp(x) \cdot \text{ei}(x)$$

$$(\text{ei}(\)) \text{ ist die Exponentialintegralfunktion: } \text{ei}(x) \equiv \int_x^\infty (1/z) \cdot \exp(-z) dz. \quad (14)$$

eingeführt wurde (s. KNORR¹⁰). Sie hat den Vorzug, in einem weiten Bereich des Arguments x von der Größenordnung Eins zu sein.

Für die bevorstehenden Rechnungen werden diese Koeffizienten gebraucht, um aus ihnen über das Prinzip vom detaillierten Gleichgewicht diejenigen für die Umkehrprozesse, also für spontane Emission und Strahlungsrekombination, herzuleiten. Der Koeffizient für spontane Emission von q nach p (identisch mit dem EINSTEIN-Koeffizienten und üblicherweise mit A_{qp} bezeichnet) ist demnach:

$$\bar{R}_{qp}^\dagger = z^4 \cdot R_{gg} \cdot \frac{1}{p} \cdot \frac{2}{q^5} \cdot \frac{1}{[1 - p^2/q^2]} [\text{sec}^{-1}]. \quad (15)$$

Der Koeffizient für Strahlungsrekombination auf das Niveau p ist:

$$p^{*+1} \bar{R}_p^\dagger = z p_0^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot R_{fg} s \cdot \frac{1}{p^2} \cdot \frac{1}{[1 - p^2/(p^{*+1})^2]^{1/2}} \cdot G(s_{p,p^{*+1}}) [\text{cm}^3 \cdot \text{sec}^{-1}]. \quad (16)$$

⁸ Es wird durchgehend das CGS-System benutzt.

⁹ A. UNSÖLD, Physik der Sternatmosphären, Verlag Springer, Berlin 1955.

¹⁰ G. KNORR, Z. Naturforschg. **13a**, 941 [1958].

Dabei ist

$$\begin{aligned} R F_{fg} &= (4\pi)^{3/2} a_0^3 R F_{gg} \\ &= \frac{2^6 \alpha^4}{\pi^{1/2} 3^{3/2}} c \pi a_0^2 [\text{cm}^3 \text{sec}^{-1}]. \end{aligned} \quad (17)$$

Außerdem gilt:

$$\begin{aligned} R F_{gg} &= 0,789 \cdot 10^{10} \text{sec}^{-1}, \\ (4\pi)^{3/2} a_0^3 &= 1,987 \cdot 10^{-23} \text{cm}^3, \\ R F_{fg} &= 1,528 \cdot 10^{-13} \text{cm}^3 \cdot \text{sec}^{-1}. \end{aligned}$$

Auf Grund der Herleitung der fg- aus den gg-Koeffizienten folgt, daß die Strahlungsemissionskoeffizienten der erwähnten „Konsistenz-Forderung“ genügen.

2.2. Stoßprozesse

Bei Wasserstoffähnlichkeit des Termsystems ist also die „Konsistenz-Forderung“ bezüglich der Strahlungsprozesse von selbst erfüllt; bei den Stoßprozessen soll sie gerade dazu benutzt werden, um aus den einigermaßen bekannten Querschnitten für Ionisierung die viel weniger bekannten für Anregung abzuleiten, indem man sich nämlich wieder auf das Korrespondenzprinzip stützt.

Während die Kenntnis der Stoßanregungsquerschnitte noch sehr lückenhaft ist (es gibt praktisch keine Information über Querschnitte aus angeregten Niveaus), läßt sich der Querschnitt für Stoßionisation für wasserstoffähnliche Ionen hoher Ionisationsstufen (große z) in seinem relativen Verlauf recht gut durch die Funktion $(\ln U_p)/U_p$ wiedergeben ($U_p = E/\chi_p$; E : kinetische Energie des stoßenden Elektrons; χ_p : Ionisierungsenergie des Niveaus p)¹¹⁻¹⁵.

Abb. 3 zeigt reduzierte Querschnitte für Ionisation aus dem Grundzustand bei wasserstoffähnlichen Ionen nach SEATON¹⁵. Das Maximum liegt also für Ionen näher am Schwellwert als für Atome.

Hier soll der Ionisationsquerschnitt für Ionen in der Form

$$p^{*+1} c_p = \pi a_0^2 (\chi_H/p^{*+1} \chi_p)^2 \cdot p^{*+1} \tilde{c}_p^{(\text{red})} [\text{cm}^2], \quad (18)$$

mit dem reduzierten Querschnitt¹⁶

$$\begin{aligned} p^{*+1} \tilde{c}_p^{(\text{red})} &= 2^4/3^{3/2} \pi \cdot \ln p^{*+1} U_p / p^{*+1} U_p \times \\ &\quad \times 1/[1 - p^2/(p^* + 1)^2]^2 \\ &= \frac{2^4}{3^{3/2} \pi} \cdot \frac{1}{[1 - p^2/(p^* + 1)^2]^2} = 2 p^{*+1} f_p. \end{aligned} \quad (19)$$

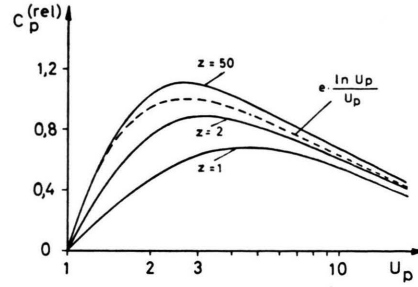


Abb. 3. Reduzierte Querschnitte für Ionisierung wasserstoffähnlicher Ionen nach SEATON¹⁵ (durchgezogene Kurven. $z = 1$: H; $z = 2$: He⁺; $z = 50$: repräsentativ für ein Ion sehr großer Ladung). Die gestrichelte Kurve zeigt den in den Rechnungen benutzten Querschnitt mit dem Verlauf $(\ln U_p)/U_p$. (Der Faktor $e \approx 2,7$ dient nur zur Normierung.)

benutzt werden. $p^{*+1} \chi_p$ ist die Ionisierungsenergie eines Ions mit p^* gebundenen Niveaus vom Niveau p aus, $p^{*+1} U_p$ ist die reduzierte Elektronenenergie $E/p^{*+1} \chi_p$.

Es wird jetzt gefragt: Wie muß der Querschnitt c_{pq} für Stoßanregung aussehen, damit sich aus ihm im Grenzübergang gerade die Form (18) mit (19) für den Ionisationsquerschnitt $p^{*+1} c_p$ ergibt?

Der Grenzübergang wird so gemacht, daß man den Querschnitt für Anregung einer ganzen Gruppe von eng benachbarten Niveaus formuliert und dann diese Gruppe zu einem Kontinuumsband „verschmiert“. Für den Anregungsquerschnitt wird angesetzt:

$$c_{pq} = \pi a_0^2 (\chi_H/E_{pq})^2 \cdot f_{pq} \cdot W(U_{pq})/U_{pq} [\text{cm}^2], \quad (20)$$

d. h. Proportionalität zur zugehörigen Dipol-Oszillatorenstärke f_{pq} ^{17, 11}. $W(U_{pq})$ ist die noch zu bestimmende Funktion und E_{pq} die Anregungsenergie, $U_{pq} = E/E_{pq}$ die reduzierte Elektronenenergie. Der Querschnitt dafür, daß aus einer ganzen Gruppe von Niveaus um q herum ($q \gg p$) eines angeregt wird, ist gleich der Summe der Einzelquerschnitte. Wenn man jetzt — wie zuvor bei den Strahlungsprozessen — das Ausgangsniveau p festhält, das Endniveau q , von dem man annimmt, es liege schon nahe der Ionisierungsgrenze, variiert und dann den Grenzübergang auf „verschmierte“ Niveaus macht, so ergibt sich der Querschnitt für Anregung einer Gruppe dq von Niveaus um q herum, bzw. ein „differentiel-

¹¹ M. J. SEATON, Atomic and Molecular Processes, Ed. D. R. BATES, Academic Press, New York 1962.

¹² H. W. DRAWIN, EUR-CEA-236 [1963].

¹³ M. R. H. RUDGE u. S. B. SCHWARTZ, Proc. Phys. Soc. London 88, 563 [1966].

¹⁴ M. R. H. RUDGE u. S. B. SCHWARTZ, Proc. Phys. Soc.

London 88, 579 [1966].

¹⁵ M. J. SEATON, Planetary Space Sci. 12, 55 [1964].

¹⁶ Daß der Faktor vor $(\ln p^{*+1} U_p)/p^{*+1} U_p$ gerade diese Form hat, wird erst aus dem folgenden verständlich werden. Es hängt damit zusammen, daß nach (5)

¹⁷ H. A. BETHE, Ann. Phys. Leipzig 5, 325 [1930].

ler“ Ionisierungsquerschnitt für Ionisation aus dem Niveau p in ein Energieband der Breite $d(h\nu)$:

$$\frac{dc_p}{d(h\nu)} = \frac{2^4}{3^{3/2}\pi} \cdot \pi a_0^2 \cdot \frac{1}{z^4} \cdot \frac{1}{p^5} \cdot \frac{(z^2 \chi_H)^4}{(h\nu)^5} \cdot \frac{W(E/h\nu)}{(E/h\nu)}, \quad (21)$$

wobei (4) benutzt wurde. (21) gilt für $h\nu \geq h\nu_{p,p^{*+1}}$ und für $E \geq h\nu$. Die Elektronenenergie E ist Parameter; die unabhängige Variable ist $h\nu$.

Dieses ist der Querschnitt für folgenden Prozeß: Ein Elektron der Energie E führt mit einem $(z-1)$ -Ion im Niveau p einen unelastischen Stoß aus und hinterläßt das Ion im (z) -fach ionisierten Zustand, bei dem das „Leuchtelektron“ sich anschließend in einem Energieband zwischen $h\nu$ und $h\nu + d(h\nu)$ im Kontinuum befindet. Das stoßende Elektron mit der Energie E kann dem herausgeschlagenen Leuchtelektron jede Energie $(h\nu - h\nu_{p,p^{*+1}})$ zwischen 0 und $E - h\nu_{p,p^{*+1}}$ mitgeben. Der Querschnitt dafür, daß es ihm irgendeine dieser Energien abgibt, ist gleich der Summe der Einzelquerschnitte, d. h. dieser gesamte Querschnitt ergibt sich durch Integration über die Energie $h\nu$.

Ein Vergleich mit dem Ionisierungsquerschnitt (18), (19) liefert dann die gesuchte Funktion:

$$W(U_{pq}) = p[1 + 3 \cdot \ln(U_{pq})]. \quad (22)$$

Es ergibt sich also erstens, daß der Anregungsquerschnitt für Ionen am Schwellwert endlich sein muß, wenn er im Grenzübergang einen Ionisationsquerschnitt der Form (19) ergeben soll. Dieser endliche Wert am Schwellwert wird auch von detaillierten quantenmechanischen Rechnungen als Folge des COULOMB-Feldes vorhergesagt, z. B.¹¹.

Zweitens: Das Skalengesetz, speziell die p^4 -Abhängigkeit des Ionisationsquerschnitts wasserstoffähnlicher Ionen, erhält man bereits — für große Energien E — bei der klassischen Herleitung von THOMSON¹⁸, ebenso wie bei der quantenmechanischen Ableitung, in der 1. BORNSchen Näherung, von BETHE¹⁷, als auch bei genaueren Rechnungen (z. B.¹³). Alle diese Rechnungen lassen sämtliche

möglichen Stoßübergänge in das Kontinuum zu. Wenn nicht $W(U_{pq})$ selbst noch explizit von den Hauptquantenzahlen abhängt, bedeutet dagegen ein Ansatz der Form (20), daß bei Stoßanregungen nur die Dipol-Übergänge maßgebend sind. Nach dem Ergebnis (22) ist aber $W(U_{pq})$ proportional zu p . Um die „Konsistenz-Forderung“ zu erfüllen, muß für Stoßanregungen das Skalengesetz also vielmehr die Form haben:

$$c_{pq} = \pi a_0^2 (\chi_H/E_{pq})^2 p f_{pq} c_{pq}^{(\text{red})}. \quad (23)$$

Dann hängt der reduzierte Querschnitt $c_{pq}^{(\text{red})}$ nur noch von der reduzierten Energie U_{pq} ab:

$$c_{pq}^{(\text{red})} = [1 + 3 \cdot \ln(U_{pq})]/U_{pq} \quad (\text{s. Abb. 7}). \quad (24)$$

Der Faktor p in (23) trägt also offenbar dem Anteil der anderen Multipolübergänge Rechnung, der demnach in diesem Modell proportional zur Hauptquantenzahl p des unteren Niveaus zunimmt. Qualitativ stimmt das mit den Ergebnissen von KINGSTON und LAUER^{19,20} überein, die sich allerdings auf Wasserstoff und den Gültigkeitsbereich der BORNSchen Näherung beziehen.

Analog zu (23) kann man den Ionisationsquerschnitt (18), (19) ausdrücken durch die Dipol-Oszillatorenstärke $p^{*+1}f_p$ für das Kontinuum (5):

$$p^{*+1}c_p = \pi a_0^2 (\chi_H/p^{*+1}\chi_p)^2 p p^{*+1}f_p p^{*+1}c_p^{(\text{red})}, \quad (25)$$

$$\text{mit} \quad p^{*+1}c_p^{(\text{red})} = 2 \cdot \ln(p^{*+1}U_p)/p^{*+1}U_p. \quad (26)$$

In der Form (24) soll hier der Anregungsquerschnitt für alle Ionen benutzt werden, allerdings unter dem ausdrücklichen Hinweis, daß der Ionisationsquerschnitt (26), und damit auch der Anregungsquerschnitt (24), eigentlich nur für Ionen mit sehr hoher Ionisationsstufe z gelten.

Aus den Querschnitten ergeben sich die zugehörigen Koeffizienten durch Multiplikation mit der Relativgeschwindigkeit zwischen Elektronen und Ionen und Mittelung über die Verteilungsfunktion der Geschwindigkeiten (MAXWELL-Verteilung).

Man erhält dann

$$\bar{C}_{pq}^\dagger = 3 \cdot C F_{gg} \cdot \frac{1}{z^3} \cdot \frac{p^5}{q^3} \cdot \frac{\exp(-s_{pq})}{[1 - p^2/q^2]^{9/2}} \cdot G(s_{pq}) \cdot \left[1 + \frac{2s_{pq}^{1/2}}{3G(s_{pq})}\right] [\text{cm}^3 \text{sec}^{-1}] \quad (27)$$

¹⁸ J. J. THOMSON, Phil. Mag. **23**, 419 [1912].

¹⁹ A. E. KINGSTON u. J. E. LAUER, Proc. Phys. Soc. London **87**, 399 [1966].

²⁰ A. E. KINGSTON u. J. E. LAUER, Proc. Phys. Soc. London **88**, 597 [1966].

für den Koeffizienten der Anregungstöße und

$$p^{*+1}\bar{C}_p^\dagger = \frac{1}{2} \cdot {}^C F_{gg} \cdot \frac{1}{z^3} \cdot p^3 \cdot \frac{\exp(-s_p, p^{*+1})}{[1 - p^2/(p^{*+1})^2]^{7/2}} \cdot G(s_p, p^{*+1}) \quad [\text{cm}^3 \text{sec}^{-1}] \quad (28)$$

für den Koeffizienten der Ionisierungstöße.

Der Zahlenfaktor ${}^C F_{gg}$ ist eine Kombination aus Naturkonstanten:

$${}^C F_{gg} = (2^5 \alpha / \pi^{3/2} 3^{3/2}) c \pi a_0^2 \quad [\text{cm}^3 \text{sec}^{-1}]. \quad (29)$$

Die „Konsistenz-Forderung“ ist durch die Art des Grenzübergangs (Anregung \rightarrow Ionisation) erfüllt. Die Koeffizienten der inversen Prozesse ergeben sich wieder aus der Anwendung des Prinzips vom detailierten Gleichgewicht. So ist der Koeffizient für Stöße 2. Art:

$$\bar{C}_{qp}^\dagger = 3 \cdot {}^C F_{gg} \cdot \frac{1}{z^3} \cdot \frac{p^7}{q^5} \cdot \frac{1}{[1 - p^2/q^2]^{9/2}} \cdot G(s_{pq}) \cdot \left[1 + \frac{2s_1^2 p q}{3 G(s_{pq})} \right] [\text{cm}^3 \text{sec}^{-1}] \quad (30)$$

und der Koeffizient für Dreierstoßrekombinationen ist:

$$p^{*+1}\bar{C}_p^\dagger = \frac{1}{2} \cdot {}^C F_{fg} \cdot \frac{p_0^3}{z^6} \cdot s^{3/2} \cdot p^5 \cdot \frac{1}{[1 - p^2/(p^{*+1})^2]^{7/2}} \cdot G(s_p, p^{*+1}) \quad [\text{cm}^6 \text{sec}^{-1}]. \quad (31)$$

$$\text{Dabei ist} \quad {}^C F_{fg} = (4\pi)^{3/2} a_0^3 {}^C F_{gg} = (2^8 \alpha / 3^{3/2}) a_0^3 c \pi a_0^2 \quad [\text{cm}^6 \text{sec}^{-1}]. \quad (32)$$

$$\text{Außerdem gilt:} \quad {}^C F_{gg} = 2,13 \cdot 10^{-8} \text{ cm}^3 \text{sec}^{-1}, \quad {}^C F_{fg} = 4,23 \cdot 10^{-31} \text{ cm}^6 \text{sec}^{-1}.$$

3. Das Gleichungssystem für die stationären Besetzungen

Für ein Ion mit p^* gebundenen Niveaus (die übrigen mögen entweder durch die Mikrofelder im Plasma oder auch nur in der Vorstellung zum Kontinuum freier Elektronen „verschmiert“ sein) ergibt sich zur Beschreibung der stationären Besetzungen ein System von $p^* + (1 - p_0)$ linearen, inhomogenen Gleichungen, das aus dem Gleichgewicht von Entvölkerungs- und Bevölkerungsprozessen jedes einzelnen Niveaus p besteht:

$$\begin{aligned} n_e \cdot \sum_{q=p_0}^{p-1} n_p \bar{C}_{pq}^\dagger + \sum_{q=p_0}^{p-1} n_p \bar{R}_{pq}^\dagger + n_e \cdot \sum_{q=p+1}^{p^*} n_p \bar{C}_{pq}^\dagger + n_e n_p \cdot p^{*+1} \bar{C}_p^\dagger = n_e \cdot \sum_{q=p_0}^{p-1} n_q \bar{C}_{qp}^\dagger + n_e \cdot \sum_{q=p+1}^{p^*} n_q \bar{C}_{qp}^\dagger \\ + n_e^2 n_z p^{*+1} \bar{C}_{pq}^\dagger + \sum_{q=p+1}^{p^*} n_q \bar{R}_{qp}^\dagger + n_e n_z p^{*+1} \bar{R}_p^\dagger. \end{aligned} \quad (33)$$

Gemeint sind hier die Niveaus p des $(z-1)$ -Ions, doch wird der Index „ $z-1$ “ fortgelassen. p_0 ist die Hauptquantenzahl vom Grundzustand des wasserstoff- oder alkaliähnlichen Ions.

Aus diesem Gleichungssystem soll n_z/n_{z-1} bzw. — siehe 1.7, Gl. (1) — die Abweichung ϱ von der LTE-Besetzung berechnet werden, wobei nach Voraussetzung 1.6 angenommen wird, daß $n_{z-1} \approx n_{p_0}$ ist.

Aufsummierung aller $p + (1 - p_0)$ Gleichungen liefert:

$$n_e \cdot \sum_{p=p_0}^{p^*} n_p p^{*+1} \bar{C}_p^\dagger = n_e \cdot n_z \cdot \sum_{p=p_0}^{p^*} (n_e p^{*+1} \bar{C}_p^\dagger + p^{*+1} \bar{R}_p^\dagger). \quad (34)$$

Das Gleichgewicht zwischen allen Ionisations- und allen Rekombinationsprozessen enthält also explizit nicht mehr die Prozesse zwischen diskreten Niveaus. Implizit bestimmen sie über die Besetzungsdichten n_p aber trotzdem das Ionisationsgleichgewicht n_z/n_{z-1} . In vielen Fällen wird man abschätzen, daß die Gesamtheit der Rekombinationen überwiegend durch Dreierstöße vor sich geht. Nichtsdestoweniger müssen aber die Strahlungsrekombinationen bei der Berechnung des Ionisationsgleichgewichts mitgenommen werden, denn gerade die Abweichung der Dichten n_p von der LTE-Besetzung führt dazu, daß sich die Summe aller Dreierstoßrekombinationen von der aller Stoß-

ionisationen um den Betrag der Strahlungsrekombinationen unterscheidet.

Es ist praktisch, statt der absoluten Dichten n_p ihre Abweichungen q_p von der LTE-Besetzung in die Rechnungen einzuführen:

$$q_p = (n_p/n_z) (n_z/n_p)^{(E)}, \quad (35)$$

wobei sich bei gegebener Temperatur T und Elektronendichte n_e aus der SAHA-BOLTZMANN-Gleichung ergibt:

$$\begin{aligned} (n_p/n_z)^{(E)} &= (4\pi)^{3/2} a_0^3 (p_0^3/z^3) \\ &\times s^{3/2} p^2 \exp(s_{p,p^*+1}) n_e \\ &\equiv n_e / S_p^{(z-1)+}. \end{aligned} \quad (36)$$

Unter Anwendung der Beziehungen des detaillierten Gleichgewichts auf die Koeffizienten, z. B.

$$n_q^{(E)} C_{qp}^\dagger = n_p^{(E)} \bar{C}_{qp}^\dagger \quad \text{usw.}$$

sowie nach Einführung der reduzierten Elektronendichte:

$$v_e = \frac{p_0^8}{z^7} \cdot \frac{n_e}{RF_{gg}/CF_{gg}} \quad (37)$$

$$(RF_{gg}/CF_{gg} = (\alpha^3/4\pi^{1/2}) (1/a_0^3) = 3,71 \cdot 10^{17} \text{ cm}^{-3})$$

erhält das Gleichungssystem dann die Form:

$$\sum_{q=p_0}^{p^*} A_{pq} q_q = B_p; \quad p = p_0, p_0 + 1, \dots, p^*. \quad (38)$$

$$\text{Dabei ist} \quad A_{pq} = v_e a_{pq}^{(c)} + a_{pq}^{(r)} \quad (39)$$

mit den Definitionen:

$$a_{pq}^{(c)} = \begin{cases} -C_{pq}^\dagger & (p > q) \\ \sum_{q=p_0}^{p-1} C_{pq}^\dagger + \sum_{q=p+1}^{p^*} C_{pq}^\dagger + p^{*+1} C_p^\dagger & (p = q) \\ -C_{pq}^\dagger & (p < q) \end{cases} \quad (40)$$

und

$$a_{pq}^{(r)} = \begin{cases} 0 & (p > q) \\ \sum_{q=p_0}^{p-1} R_{qp}^\dagger & (p = q) \\ 0 & (p < q) \end{cases} \quad (41)$$

Matrizelemente

$p > q$: unterhalb der Diagonalen, } (Bevölkerungen)
 $p < q$: oberhalb der Diagonalen, }
 $p = q$: in der Diagonalen. (Entvölkerungen)

Es soll die Summationsvereinbarung gelten:

Wenn der untere Summationsindex größer ist als der obere, dann soll eine Summe Null sein.

$$\text{Außerdem ist} \quad B_p = v_e b_p^{(c)} + b_p^{(r)} \quad (42)$$

mit den Definitionen:

$$b_p^{(c)} = p^{*+1} C_p^\dagger \quad (43) \quad \text{und} \quad b_p^{(r)} = p^{*+1} R_p^\dagger. \quad (44)$$

Die neuen — nunmehr dimensionslosen — Koeffizienten, (a) für Stoßprozesse, in (40) und (43), ergeben sich aus den ursprünglichen durch Division mit $2 z^4 RF_{gg}$, (b) diejenigen für Strahlungsprozesse, in (41) und (44), durch Division mit

$$2 (p_0^8/z^3) CF_{gg}.$$

Zusätzlich wird eingeführt:

$$p^{*+1} R_p^\dagger = p^{*+1} \bar{R}_p^\dagger / (2 (p_0^8/z^3) CF_{gg})$$

$$\text{und} \quad p^{*+1} C_p^\dagger = p^{*+1} \bar{C}_p^\dagger / (2 (p_0^{16}/z^{10}) (CF_{gg})^2 / RF_{gg}).$$

Die in (36) definierte SAHA-BOLTZMANN-Verteilung hat nach Einführung der reduzierten Elektronendichte v_e das Aussehen:

$$\begin{aligned} \sigma_p^{(z-1)+} &\equiv v_e (n_z/n_p)^{(E)} \\ &= \frac{1}{2\pi\alpha^3} \cdot \frac{p_0^5}{z^4} \cdot \frac{1}{s^{3/2}} \cdot \frac{1}{p^2} \cdot \exp(-s_{p,p^*+1}). \end{aligned} \quad (45)$$

Nach (1) ist n_z/n_{z-1} aus dem LTE-Wert und dem Faktor q zu berechnen, der die Abweichung des wirklichen Wertes von der LTE-Besetzung angibt. Nach Annahme 1.6 sollen praktisch alle Ionen der Sorten $(z-1)$ und (z) im Grundzustand vorliegen, d. h. — unter Fortlassen des Index bei n_{p_0} und $n_{p_0}^{(E)}$ —:

$$n_{z-1} \approx n_{p_0}; \quad n_{z-1}^{(E)} \approx n_{p_0}^{(E)}, \quad (46)$$

wobei p_0 die Hauptquantenzahl vom Grundzustand des $(z-1)$ -Ions ist. In dieser Näherung ist also

$$\frac{n_z}{n_{z-1}} = \frac{1}{q_{p_0}} \cdot \frac{S_{p_0}^{(z-1)+}}{n_e} = \frac{1}{q_{p_0}} \cdot \frac{\sigma_{p_0}^{(z-1)+}}{v_e}. \quad (47)$$

Der Faktor q in (1) ist also im wesentlichen durch die Abweichung q_{p_0} der Grundzustandsbesetzungen gegeben:

$$q \approx q_{p_0}. \quad (48)$$

Einführen der dimensionslosen Größen in (34), Berücksichtigen der Beziehung

$$p^{*+1} C_p^\dagger = p^{*+1} \bar{C}_p^\dagger / \sigma_p^{(z-1)+} \quad (49)$$

und Auflösen nach q_{p_0} liefert die Gleichung:

$$\begin{aligned} q_{p_0} &= 1 + (V/v_e) \\ &\times \{1 + (v_e/V) \sum_{p=p_0+1}^{p^*} (1 - q_p) \cdot p^{*+1} \bar{C}_p^\dagger / p^{*+1} \bar{C}_{p_0}^\dagger\}, \end{aligned} \quad (50)$$

wobei

$$V = \left(\sum_{p=p_0}^{p^*} p^{*+1} R_p^{\downarrow} \right) / p^{*+1} C_{p_0}^{\downarrow} \\ = \sigma_{p_0}^{(z-1)+} \cdot \left(\sum_{p=p_0}^{p^*} p^{*+1} R_p^{\downarrow} \right) / p^{*+1} C_{p_0}^{\uparrow}. \quad (51)$$

An die Gl. (50) soll die folgende Diskussion anknüpfen: Der zweite Summand in der geschweiften Klammer repräsentiert den Beitrag der angeregten Niveaus zum Ionisationsgleichgewicht. Nur in zwei Grenzfällen darf man diesen Beitrag vernachlässigen: (a), bei so großen Elektronendichten, daß alle angeregten Niveaus bereits vollständig „thermisch besetzt“ sind ($\varrho_p = 1$ für $p > p_0$). Dann konvergiert auch ϱ_{p_0} mit zunehmender Elektronendichte gegen Eins, d. h. dann gibt es oberhalb einer bestimmten Elektronendichte keine Abweichung von der LTE-Besetzung mehr:

$$\lim_{\nu_e \rightarrow \infty} \varrho_{p_0} = 1. \quad (52)$$

Oder aber, (b), die Elektronendichte muß sehr klein sein, damit die angeregten Niveaus ignoriert werden dürfen. Da nämlich die Abweichung ϱ_p für angeregte Niveaus gegenüber den LTE-Werten mit abnehmender Elektronendichte einem Sättigungswert zustrebt (siehe unten), sorgt der Faktor ν_e an dem zweiten Summanden der geschweiften Klammer von (50) dafür, daß unterhalb einer gewissen Elektronendichte der Beitrag der angeregten Niveaus vernachlässigbar bleibt. Bei diesen kleinen Elektronendichten ist andererseits V/ν_e groß gegen Eins, so daß sich (50) dann auf die Form reduziert:

$$\lim_{\nu_e \rightarrow 0} \varrho_{p_0} \equiv \varrho_{p_0}^{(K)} = V/\nu_e. \quad (53)$$

Vergleich von (47), (53) und (51) liefert dann die Korona-Verteilung:

$$(n_z/n_{z-1})^{(K)} = p^{*+1} C_{p_0}^{\uparrow} / \left(\sum_{p=p_0}^{p^*} p^{*+1} R_p^{\downarrow} \right). \quad (54)$$

Im Zwischengebiet mittlerer Elektronendichte ergibt sich eine kompliziertere Abhängigkeit von ν_e , und zwar geht dabei der anfangs erwähnte Unterschied in der Termstruktur zwischen den Wasserstoffähnlichen und den Alkaliähnlichen wesentlich ein.

Der Zusammenhang zwischen ϱ_p und der Elektronendichte ν_e wird übersichtlich, wenn man ϱ_p mit Hilfe der CRAMERSchen Regel aus dem Gleichungssystem (38) berechnet:

$$\varrho_p = D_p / D. \quad (55)$$

D ist die Determinante der Koeffizientenmatrix (A_{pq}) von (38). Die Determinante D_p entsteht aus D , indem die p -Spalte der Matrix durch die Elemente des Vektors (B_p) ersetzt wird. Wenn man beide Determinanten durch Summen aus Potenzen von ν_e darstellt, stellt sich heraus, daß der größte vorkommende Exponent zwar bei beiden Determinanten $p^* + (1 - p_0)$ ist, der kleinste 1 bei D und D_p für $p > p_0$, aber 0 bei D_{p_0} ist. Daneben kommen in beiden Summen alle Potenzen mit ganzzahligen Exponenten zwischen 1 und $p^* + (1 - p_0)$ vor. Das führt zu der bereits erwähnten Aussage, daß die Werte von ϱ_p für $p > p_0$ mit abnehmender Elektronendichte ν_e einen Sättigungswert erreichen.

4. Ergebnisse:

Tabellen, Diagramme und Näherungsformeln

Das Gleichungssystem (33) wurde mit Hilfe der IBM 7090 gelöst, und zwar für die drei Ionenarten:

$$p_0 = 1 : \text{H-Ähnliche}, \quad p_0 = 2 : \text{Li-Ähnliche}, \\ p_0 = 3 : \text{Na-Ähnliche}.$$

Für jede der drei Ionenarten wurden die stationären Besetzungen als Funktion der Elektronendichte ν_e bei jeweils vier verschiedenen Temperaturen s berechnet. Für jedes Wertepaar (ν_e, s) gibt es eine Mindestanzahl p^* von Gleichungen, oberhalb derer die Lösung praktisch nicht mehr von ihr abhängt.

In den Abb. 4 bis 6 sind die für das Ionisationsgleichgewicht maßgebenden Werte ϱ_{p_0} aufgetragen. Vergleichshalber sind außerdem diejenigen Besetzungen $\varrho_{p_0}^{(K)}$ angegeben, die sich ohne Berücksichtigung der angeregten Niveaus bezüglich der Stoßionisationen und -rekombinationen, d. h. nach der Korona-Verteilung ergeben. Bei den Korona-Werten wurde wiederum unterschieden, ob Strahlungsrekombinationen nur auf das Grundniveau oder auf alle Niveaus berücksichtigt werden. Die Korona-Werte für den zuletzt genannten Fall entsprechen den Werten der ELWERTSchen Korona-Formel.

Die ϱ_{p_0} -Werte lassen sich in einem weiten Wertebereich von ν_e durch eine Näherungsformel wiedergeben. Sie enthält zwei Parameter, die die ν_e -Abhängigkeit regulieren und vier Parameter, die die s -Abhängigkeit bestimmen.

In Anlehnung an die Ergebnisse von Abschnitt 3 wird ϱ_{p_0} als Quotient zweier Potenzreihen angegeben. Die Approximation besteht darin, daß man versucht, mit Reihen auszukommen, die nach dem

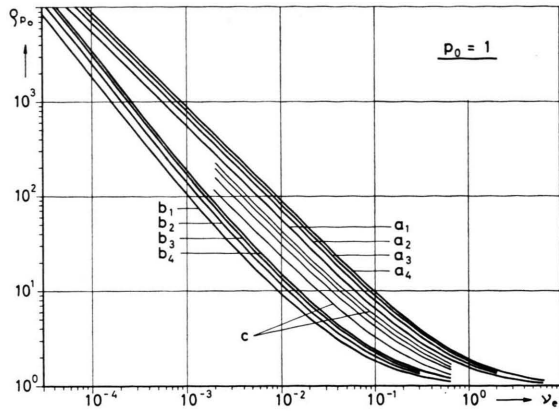


Abb. 4. Die Abweichung q_{p_0} von der LTE-Besetzung für $p_0 = 1$ (Wasserstoffähnliche), dargestellt in den unteren vier Kurven. Zum Vergleich die Werte $q_{p_0}^{(K)}$ nach der Korona-Formel (53) (obere vier Kurven). Die vier verschiedenen Kurven einer Schar gehören zu vier verschiedenen Temperaturen, und zwar: b_1 bzw. a_1 : $s = 19,74$; b_2 bzw. a_2 : $s = 9,87$; b_3 bzw. a_3 : $s = 6,58$; b_4 bzw. a_4 : $s = 4,93$. Die Kurvenschar c stellt die Korona-Werte dar, wenn Strahlungsrekombinationen nur auf den Grundzustand erfolgen (die Zuordnung der Temperaturen ist wie bei den beiden anderen Kurvenscharen).

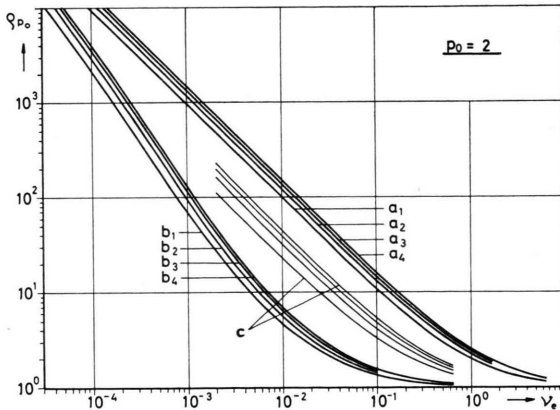


Abb. 5. Die Abweichung q_{p_0} von der LTE-Besetzung für $p_0 = 2$ (Lithiumähnliche), dargestellt in den unteren vier Kurven. Zum Vergleich die Werte $q_{p_0}^{(K)}$ nach der Korona-Formel (53) (obere vier Kurven). Die vier verschiedenen Kurven einer Schar gehören zu vier verschiedenen Temperaturen, und zwar: b_1 bzw. a_1 : $s = 19,74$; b_2 bzw. a_2 : $s = 9,87$; b_3 bzw. a_3 : $s = 6,58$; b_4 bzw. a_4 : $s = 4,93$. Die Kurvenschar c stellt die Korona-Werte dar, wenn Strahlungsrekombinationen nur auf den Grundzustand erfolgen (die Zuordnung der Temperaturen ist wie bei den beiden anderen Kurvenscharen).

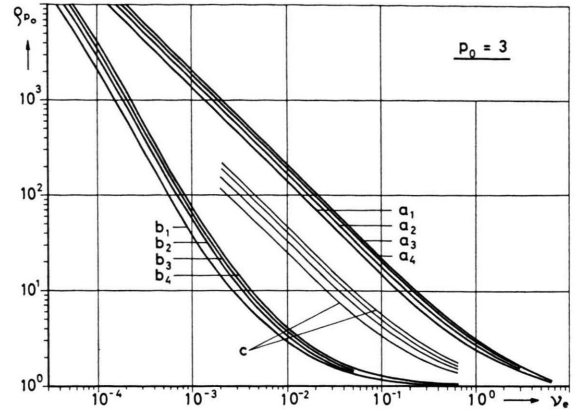


Abb. 6. Die Abweichung q_{p_0} von der LTE-Besetzung für $p_0 = 3$ (Natriumähnliche), dargestellt in den unteren vier Kurven. Zum Vergleich die Werte $q_{p_0}^{(K)}$ nach der Korona-Formel (53) (obere vier Kurven). Die vier verschiedenen Kurven einer Schar gehören zu vier verschiedenen Temperaturen, und zwar: b_1 bzw. a_1 : $s = 19,74$; b_2 bzw. a_2 : $s = 9,87$; b_3 bzw. a_3 : $s = 6,58$; b_4 bzw. a_4 : $s = 4,93$. Die Kurvenschar c stellt die Korona-Werte dar, wenn Strahlungsrekombinationen nur auf den Grundzustand erfolgen (die Zuordnung der Temperaturen ist wie bei den beiden anderen Kurvenscharen).

quadratischen Glied abbrechen:

$$q_{p_0}(v_e, s) \approx \frac{1 + w(s) \cdot [1/v_e + a/v_e^2]}{1 + b/v_e}, \quad (56)$$

$$\text{mit} \quad w(s) = \frac{\alpha + \beta s^{1/2}}{1 + \gamma s^{1/2} + \delta \cdot s}. \quad (57)$$

Der Ansatz für die s -Abhängigkeit wird durch die Erfahrung nahegelegt, daß die q_{p_0} -Werte im Groben eine Abhängigkeit proportional zu $1/s^{1/2}$ zeigen. Die Temperaturabhängigkeit ist also gegenüber derjenigen in der Korona-Formel kaum verändert (bei letzterer gilt mit dem zugrunde gelegten Ionisierungsquerschnitt die exakte Proportionalität zu $1/s^{1/2}$).

Im Wertebereich $10^{-3} \leq v_e \leq 10^0$ und $3 \leq s \leq 30$ gibt die Näherungsformel (56) mit (57) die genauen Rechenergebnisse mit maximal 5% Fehler wieder.

5. Diskussion

Es bleibt die Frage zu untersuchen, wie kritisch die Ergebnisse von der Form der gewählten Quer-

p_0	a	b	α	β	γ	δ
1	$0,1064 \cdot 10^{-2}$	$+ 0,0585 \cdot 10^{-2}$	$+ 0,963$	$- 0,00808$	$+ 2,83$	$- 0,0854$
2	$0,458 \cdot 10^{-2}$	$+ 0,1918 \cdot 10^{-2}$	$- 0,0299$	$- 0,0667$	$- 1,18$	$- 0,329$
3	$0,1495 \cdot 10^{-2}$	$- 0,00944 \cdot 10^{-2}$	$+ 7,484$	$- 1,22$	$+ 121,4$	$- 19,75$

Tab. 1. Parameter für die Näherungsformel (56) mit (57)

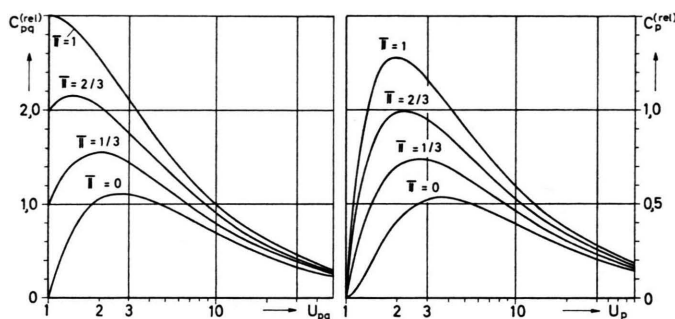


Abb. 7. Querschnitte für Anregung (Kurven a) und die nach der „Konsistenz-Forderung“ dazugehörigen Querschnitte für Ionisierung (Kurven b), für vier verschiedene Werte des Parameters $\bar{\Gamma}$ in (58) und (59)

schnitte unelastischer Stöße abhängen. Dazu wurde der reduzierte Anregungsquerschnitt (20) auf die Form verallgemeinert:

$$c_{pq}^{(\bar{\Gamma})} = 3 [\bar{\Gamma} + \ln(U_{pq})] / U_{pq}, \quad (58)$$

wobei der Parameter $\bar{\Gamma}$ sich zwischen 0 und 1 ändern kann. Für $\bar{\Gamma} = 1/3$ ergibt sich der bisher benutzte Ausdruck (24). (Mit (58) soll natürlich weiterhin der reduzierte Querschnitt gemeint sein, nur mußte aus Gründen der Übersichtlichkeit die Indizierung „red“ der Indizierung „ $\bar{\Gamma}$ “ weichen. $c_{pq}^{(1/3)}$ ist also identisch mit dem bisher benutzten $c_{pq}^{(red)}$.)

In Abb. 7 ist der Anregungsquerschnitt (58) für vier verschiedene Werte von $\bar{\Gamma}$ dargestellt. Je größer $\bar{\Gamma}$, desto näher rückt das Maximum des Querschnitts zum Schwellwert. Im Falle $\bar{\Gamma} = 0$ beginnt der Querschnitt am Schwellwert mit dem Wert Null, sein Verlauf entspricht also in etwa dem Anregungsquerschnitt von neutralen Atomen.

In Umkehrung des Gedankenganges von Abschnitt 2 läßt sich aus dem Anregungsquerschnitt (58) mit der „Konsistenz-Forderung“ der zugehörige Ionisierungsquerschnitt berechnen. Das ergibt:

$$p^{*+1} c_p^{(\bar{\Gamma})} = \frac{2}{3} [(1 - 3\bar{\Gamma})(1 - p^{*+1} U_p^3) + 3 p^{*+1} U_p^3 \ln(p^{*+1} U_p)] / p^{*+1} U_p^4. \quad (59)$$

Die zu den vier Anregungsquerschnitten gehörenden Ionisierungsquerschnitte sind ebenfalls in Abb. 7 wiedergegeben.

In den Abb. 8 und 9 sind die Rechenergebnisse ϱ_{p_0} für vier verschiedene Parameterwerte von $\bar{\Gamma}$ den korrespondierenden Korona-Werten $\varrho_{p_0}^{(K)}$ gegenübergestellt, und zwar für $p_0 = 2$ und zwei Temperaturen s . In Tab. 2 ist außerdem die maximale Abweichung $(\varrho_{p_0}^{(K)} / \varrho_{p_0})_{\max}$ zwischen den Korona- und den Modell-Werten für die beiden Ionenarten $p_0 = 2$ und $p_0 = 3$ in Abhängigkeit vom Querschnittsverlauf zusammengestellt. (Das Gebiet maximaler Ab-

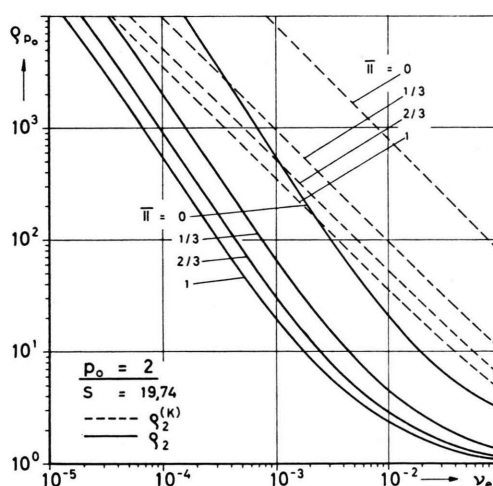
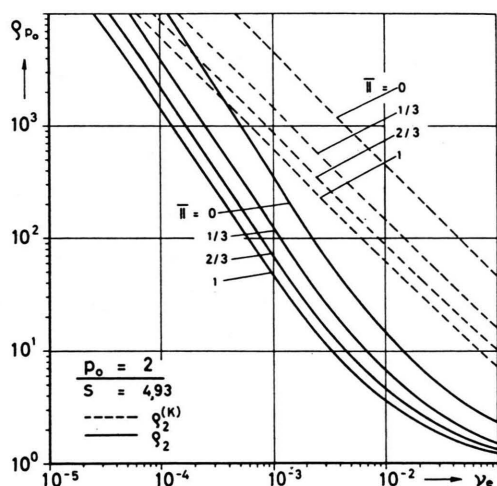


Abb. 8 und 9. Vergleich zwischen den Rechenergebnissen ϱ_{p_0} und den Korona-Werten $\varrho_{p_0}^{(K)}$ für $p_0 = 2$ und zwei extremer Temperaturen, $s = 4,93$ und $s = 19,74$, für vier verschiedene Formen der Stoßquerschnitte: $\bar{\Gamma} = 0; 1/3; 2/3; 1$.

weichung liegt ungefähr bei $\nu_e = 5 \cdot 10^{-3}$.) Aus der Tabelle erkennt man: Das Ergebnis ist zwar etwa um den Faktor 2 verschieden, je nachdem, ob man Querschnitte für Atome ($\Pi = 0$) oder ob man solche für Ionen ($\Pi \approx 1/3$) benutzt, doch das Ergebnis hängt erstaunlich unempfindlich davon ab, wie genau der Querschnitt für Ionen bekannt ist, ob $\Pi = 1/3$, $2/3$ oder 1 ist. Viel entscheidender für die Abweichung von den Korona-Ergebnissen ist die Struktur der Termschemata, nicht die der Querschnitte.

Π	$p_0 = 2$		$p_0 = 3$	
	$s = 4,93$	$s = 19,74$	$s = 4,93$	$s = 19,74$
0	31,6	40,0	89,8	115
$1/3$	21,5	21,3	50,1	52,3
$2/3$	19,1	20,0	46,2	47,3
1	18,8	19,9	42,7	45,8

Tab. 2. Die maximale Abweichung der Rechenergebnisse gegenüber den Werten der Korona-Formel (53): $(\varrho_{p_0}^{(K)}/\varrho_{p_0})_{\max}$ für vier verschiedene Querschnittsverläufe (Parameter Π) und zwei verschiedene Temperaturen.

Diese Abweichung $\varrho_{p_0}^{(K)}/\varrho_{p_0}$ kann — nach Tab. 2 — bei lithiumähnlichen Ionen ($p_0 = 2$) und mit den verwendeten Querschnitten ($\Pi = 1/3$) bis zu einem Faktor der Größenordnung 20 ansteigen. Würde man beispielsweise aus dem Intensitätsverhältnis einer O V- und einer O VI-Linie (mit „stoßbestimmten“ oberen Niveaus) in einem optisch dünnen Plasma der Elektronendichte $n_e = 5 \cdot 10^{17} \text{ cm}^{-3}$ die Anregungstemperatur aus der Korona-Formel bestimmen, so würde man die Temperatur um den Wert $\ln 20 \approx 3$ überschätzen.

Es sei noch einmal betont, daß diese Ergebnisse um so besser gültig sind, je größer die Ladung des Ions ist, daß sie außerdem für Lithiumähnliche ($p_0 = 2$) sicherer sind als für Natriumähnliche ($p_0 = 3$), bei denen die Quantendefekte schon merklicher werden. Als Anhaltspunkte jedoch mögen die Ergebnisse auch für niedrig geladene Ionen oder gar Atome geeigneter sein als die Korona-Formel. Bei Übertragung der Ergebnisse auf neutrale Atome darf man zudem erwarten, daß zwei in entgegengesetzter Richtung wirkende Effekte einander teil-

weise aufheben, was der Zuverlässigkeit der Ergebnisse zugute kommt. Während man nämlich einerseits mit den zu $\Pi = 1/3$ gehörenden Querschnitten den Einfluß der Stöße auf die Niveau-Verkopplung überschätzt, wenn man diese Querschnitte auch den Atomen zuordnet, wird er doch andererseits durch das Modell bezüglich der Termstruktur unterschätzt, denn die im Vergleich zu Höherionisierten sehr viel größeren Quantendefekte bedeuten eine stärkere „Auffächerung“ des Termsystems bei den Neutralen.

Die dem Modell zugrunde gelegten Querschnitte gehen am kritischsten in den „Resonanz-Übergang“ $p_0 \rightarrow (p_0 + 1)$ ein. Am Beispiel von NV wurden daher die Stoßanregungsraten des Modells für den $2 \rightarrow 3$ -Übergang verglichen mit denjenigen, die sich aus berechneten Anregungsquerschnitten von TAIT et al.²¹ (sowie von BELY²²) ergeben. Beide stimmen bis auf einen Faktor der Größenordnung 2 überein (das hängt von der Elektronentemperatur und dem Strahlungsfeld des $2s\text{-}2p$ -Übergangs ab). Bei den Raten der Spontanemissionen des $2 \rightarrow 3$ -Übergangs ergab ein Vergleich zwischen den Modellwerten und den genauen Werten (mit Oszillatorenstärken nach WEISS²³) Übereinstimmung innerhalb 20%.

Was über die geringe Abhängigkeit der Rechenergebnisse von den Querschnitten gesagt wurde, betrifft den Unterschied gegenüber den Korona-Ergebnissen bei verschiedenen Elektronendichten. Um aber den Absolutwert der Abweichung gegenüber der LTE-Besetzung zu erhalten, ist man nach wie vor auf eine möglichst gute Kenntnis des Querschnitts für Ionisierung aus den unteren Niveaus, speziell aus dem Grundzustand, angewiesen. Ebenso wird die Temperaturabhängigkeit von ϱ_{p_0} weitgehend vom Querschnittsverlauf der unelastischen Stöße beherrscht. Diesem Umstand trägt z. B. BIERMANN²⁴ in seiner (bereits vor ELWERT) angegebenen Form der Korona-Formel durch einen freien Parameter l im Exponenten der Temperatur Rechnung.

Diese Arbeit wurde im Rahmen des Vertrages zwischen dem Institut für Plasmaphysik und der Europäischen Atomgemeinschaft über die Zusammenarbeit auf dem Gebiete der Plasmaphysik durchgeführt.

²¹ P. G. BURKE, J. H. TAIT u. B. A. LEWIS, Proc. Phys. Soc. London **87**, 209 [1966].

²² O. BELY, Proc. Phys. Soc. London **88**, 587 [1966].

²³ A. W. WEISS, Astrophys. J. **138** (4), 1262 [1963].

²⁴ L. BIERMANN, Naturwiss. **34**, 87 [1947].